Devoir Libre Analyse 2

Zarkti ZAKARIA

P110134380

A rendre le 22-07-2020

Problème 1

Soit $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^x}$, $n \geq 1$, $x \in [0, +\infty[$

1. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ **converge simplement dans** $[0, +\infty[$

Solution:

En appliquant le critère d'Abel:

On pose $a_n = \frac{1}{n^x}$ et $b_n = sin(nx)$

- On a a_n est une fonction positive décroissante et converge vers 0. $(\lim \frac{1}{n^x} = \lim \frac{1}{e^{\ln(n)x}} \to 0)$
- Et on a :
  $B_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} sin(nx) = Im(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{inx})$
- Si $x \neq 2k\pi$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} sin(nx) = Im(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{inx}) = Im(\frac{1-e^{i(n+1)}}{1-e^{ix}}) = Im(\frac{1}{1-cos(x)-i.sin(x)}) = Im(\frac{1.(1-cos(x)+i.sin(x))}{(1-cos(x))^2-(i.sin(x))^2})$$

$$= Im(\frac{(1-cos(x))}{2-2cos(x)} + i.\frac{sin(x)}{2-2cos(x)}) = \frac{sin(x)}{2-2cos(x)} \text{ et } \left|\frac{sin(x)}{2-2cos(x)}\right| \leq 1$$

- Si $x = 2k\pi$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} sin(nx) = 0 \leq 1$$

$$\Longrightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.b_n \text{ converge sur } [0, +\infty[}$$

2. Posons $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^x}$ *pour tout* $x \in [0, +\infty[$

a). Etudier la convergence uniforme de $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ **dans** $[\pi, +\infty[$

b). Soit $a \in]0, \pi[$**, montrer que** $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ **converge uniformément dans** $[a, \pi]$

Solution :

- En appliquant le critère d'Abel mais cette fois-ci pour la convergence uniforme.

On pose $a_n = \frac{1}{n^x}$ et $b_n = sin(nx)$

- On a a_n est une fonction positive décroissante et converge uniformément vers 0.

$(\lim sup|\frac{1}{n^x} - 0| \to 0)$ avec $x \leq a$ et 0 < a

- Et on a $\sum |b_n|$ est majorée par 1. (d'aprés la dernière question).

$$\implies \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.b_n \text{ converge uniformément sur }]0, +\infty[}$$

3. Montrer que f est continue dans $]0, +\infty[$

Solution:

On a $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$ $\boxed{1}$

On a $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^x}$ avec $n \geq 1$ est continue sur $]0, +\infty[$ $\boxed{2}$

($\sin(nx)$ est continue sur $\mathbb{R}$, esp. sur $\mathbb{R}_*^+$; $\frac{1}{n^x}$ est continue sur $\mathbb{R}_*$, esp. sur $\mathbb{R}_*^+$
$\implies f_n(x) = \sin(nx).\frac{1}{n^x}$ est continue sur $\mathbb{R}_*^+$ comme produit des fonc. continues.)

$\to$ De $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$ on déduit que f(x) (la somme vers laquelle notre série converge) est continue sur $]0, +\infty[$

4.

a). Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{x-1}}$ converge uniformément dans $[b, +\infty[$ pour yout b > 1.

Solution:

Une autre fois le critère d'Abel 😃

On pose $a_n = \frac{1}{n^{x-1}}$ et $b_n = \cos(nx)$

- On a a_n est une fonction positive décroissante et converge uniformément vers 0. $(\lim sup|\frac{1}{n^{x-1}} - 0| = \to 0)$ pour $x \leq betb > 0$
- Et on a $\sum |b_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(nx) = Re(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{inx})$
- Si $x \neq 2k\pi$:

$\sum_{n=1}^{+\infty} cos(nx)=Re(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{inx})=Re(\frac{1-e^{i(n+1)}}{1-e^{ix}}) = Re(\frac{1}{1-cos(x)-i.sin(x)}) = Re(\frac{1.(1-cos(x)+i.sin(x))}{(1-cos(x))^2-(i.sin(x))^2})$
$= Re(\frac{(1-cos(x))}{2-2cos(x)} + i.\frac{sin(x)}{2-2cos(x)}) = \frac{(1-cos(x))}{2-2cos(x)}$ et $\left|\frac{(1-cos(x))}{2-2cos(x)}\right| \leq 1$

- Si $x = 2k\pi$:

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} cos(nx)\right| = 1 \leq 1$$

Alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{x-1}}$ converge uniformément dans $[b, +\infty[$ pour tout b > 1.

b). Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n$ converge uniformément dans $[b, +\infty[$ pour tout b > 1.

Solution:

On a : $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^x} \rightarrow f'_n(x) = (\frac{\sin(nx)}{e^{x.ln(n)}})' = \frac{n^{x+1}.cos(nx)-ln(n).n^x.\sin(nx)}{n^{2x}} = \frac{\cos(nx)}{n^{x-1}} - ln(n)\frac{\sin(nx)}{n^x}$

Alors $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{x-1}} - ln(n)\frac{\sin(nx)}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{x-1}} - ln(n)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^x}$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{x-1}} - ln(n)f_n(x)$$

- $f_n(x)$ cv unifomément sur $[1, +\infty[$, et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{x-1}}$ cv unifomément alors due à la linéarité $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{x-1}} - ln(n)f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'(x)$ converge uniformément sur $[1, +\infty[$

c). En déduire que f est dérivable dans $]1, +\infty[$

Solution:

- On a $\frac{\sin(nx)}{n^x}$ est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$.
- On a $f_n(x)$ est convergente sur $]1, +\infty[$.
- On a $\sum_{n=1}^{+\infty} f'(x)$ converge uniformément sur $[1, +\infty[$

$\Longrightarrow$ Donc selon la théorème de dérivation la somme f(x) est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$